Ecuaciones funcionales: Ejemplos

F. Bellot Rosado

Primeros ejemplos de ecuaciones funcionales

Ejemplo1. *Hallar todas las funciones $f(x)$ tales que*

$$3.f(2-x)+2.f(x)=x^2 \qquad (1)$$

Solución

Ejemplo 2. *Resolver la ecuación funcional*

$$x^2-2f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \mathrm{x}\neq 0$$

Solución

Ejemplo 3. *Resolver la ecuación funcional*

$$x-\frac{1}{2}f(x)=f(x/(3x-1)), \qquad x\neq\frac{1}{3}.$$

Solución

Ejemplo 4. *Hallar las funciones* $f(x)$, definidas para todo $x \neq \pm\frac{1}{3}$, *tales que*

$$f\left(\frac{x-1}{1+3x}\right) = \frac{x+1}{1-3x} - f\left(\frac{x+1}{1-3x}\right)$$

Solución

Ejemplo 5. *Hallar las funciones*

$$f : \mathbb{R} - \{0, 1\} \to \mathbb{R}$$

tales que

$$f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1 + x \qquad (1)$$

Solución

Soluciones de los ejemplos

Solución Ejemplo 1: Sustituyendo en la ecuación $x \to 2-x$ obtenemos

$$\begin{aligned} 3f(2-(2-x)) + 2f(2-x) &= (2-x)^2 \\ 3f(x) + 2f(2-x) &= (2-x)^2 \qquad (2) \end{aligned}$$

Despejando en (1) $f(2-x)$ y sustituyendo en (2):

$$\begin{aligned} f(2-x) &= \frac{x^2 - 2f(x)}{3} \\ 3f(x) &= \frac{2}{3}\left[x^2 - 2f(x)\right] = (2-x)^2 \end{aligned}$$

que ya es una ecuación en la incógnita $f(x)$:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{5}\left(12 - 12x + x^2\right)}$$

y sólo queda comprobar que ésta función verifica (1).

Volver a los enunciados

Solución Ejemplo 2:

Sustituímos x por $\frac{1}{x}$ en toda la ecuación:

$$\frac{1}{x^2} - 2f\left(1/x\right) = f\left(x\right)$$

Combinando esta ecuación con la primera,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} - 2\left[x^2 - 2f\left(x\right)\right] &= f\left(x\right) \\ f\left(x\right) &= \frac{1}{3}\left(2x^2 - \frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

Volver a los enunciados

F. Bellot Rosado

Solución Ejemplo 3:

Reemplazamos $x \to \frac{x}{3x-1}$ en la ecuación funcional:

$$\frac{x}{3x-1} - \frac{1}{2} f\left(x/\left(3x-1\right)\right) = f\left(x\right)$$

luego combinando estas dos expresiones resulta

$$\begin{aligned} \frac{x}{3x-1} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2} f\left(x\right)\right) &= f\left(x\right) \\ f\left(x\right) &= \frac{2\left(3-x\right)}{3\left(3x-1\right)} \end{aligned}$$

Volver a los enunciados

F. Bellot Rosado

Solución Ejemplo 4:

Ahora la duda está en qué cambio hacer. Hagamos los dos, a ver qué sucede. Haciendo primero $x \to \frac{x-1}{1+3x}$ en la ecuación dada obtenemos finalmente

$$f\left(\frac{x+1}{1-3x}\right) = x - f(x) \qquad (1)$$

Si ahora hacemos el cambio $x \to \frac{x+1}{1-3x}$ resulta tras operar

$$f(x) = \frac{x-1}{1+3x} - f\left(\frac{x-1}{1+3x}\right) \qquad (2)$$

luego de (1) y (2) deducimos que

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{1+3x} - f(x) &= \frac{x+1}{1-3x} - (x - f(x)) \\ 2f(x) &= \frac{x-1}{1+3x} - \frac{x+1}{1-3x} + x \end{aligned}$$

Volver a los enunciados

F. Bellot Rosado

Solución Ejemplo 5:

Cambiando $x \to \frac{x-1}{x}$ obtenemos de (1)

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{2x-1}{x} \qquad (2)$$

Lo obtenido sugiere que en (1) hagamos ahora el cambio $x \to \frac{1}{1-x}$; con lo que resulta

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f(x)=1+\frac{1}{1-x} \qquad (3)$$

Así que si ahora calculamos (1)+(3)-(2):

$$2f(x)=1+x+1+\frac{1}{1-x}-\frac{2x-1}{x}$$

y de nuevo se comprueba que esta función verifica la ecuación funcional.

Volver a los enunciados