DESIGUALDADES

5.1.**Desigualdad de las medias**

Si $0 < a \leq b$, entonces

$$a \leq \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq b,$$

y los signos $=$ son válidos si y sólo si $a = b$.

Generalización : Para todo conjunto $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ de números positivos se verifica

$$\min(a_1, \cdots, a_n) \leq \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}(1/a_i)} \leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \leq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2}{n}} \leq \max(a_1, \cdots, a_n)$$

y el signo $=$ vale si y sólo si todos los a_i son iguales.

5.2.**Desigualdad de reordenación y su dual**

a) Un ejemplo para introducir el problema : Se tienen cuatro cajas; en una de ellas hay billetes de 10 \$, en otra de 20\$, en la tercera de 50 \$ y en la cuarta de 100 \$. Se pueden coger 3 billetes de una caja, 4 de otra, 5 de otra y 6 de otra. ¿Cómo podremos coger la máxima (mínima) cantidad de dinero ? La respuesta se deja, obviamente, al lector.

b) Si nos dan dos conjuntos ordenados finitos de números reales $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ y $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$, y si $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ es una permutación de $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$, entonces se verifica

$$a_1 b_n + \cdots + a_n b_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i c_i \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$$

Demostración

Supongamos $a_r > a_s$. Consideremos las sumas

$$\begin{aligned} S &= a_1 c_1 + \cdots + a_r c_r + \cdots + a_s c_s + \cdots + a_n c_n \\ S' &= a_1 c_1 + \cdots + a_r c_s + \cdots + a_s c_r + \cdots + a_n c_n \end{aligned}$$

Entonces

$$S' - S = a_r c_s + a_s c_r - a_r c_r - a_s c_s = (a_r - a_s)(c_s - c_r)$$

en consecuencia,

$$\begin{aligned} c_r &< c_s \Longrightarrow S' > S \\ c_r &> c_s \Longrightarrow S' < S. \blacksquare \end{aligned}$$

El resultado "dual" de éste, invirtiendo los signos de desigualdad y permutando sumas y productos, es válido para números reales **positivos** a_i, b_i :

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i + b_{n+1-i}) \geq \prod_{i=1}^{n}(a_i + c_i) \geq \prod_{i=1}^{n}(a_i + b_i)$$

c)*Algunos ejemplos de aplicación de esta desigualdad*
Introduzcamos una nueva notación para el producto escalar:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \end{bmatrix} = ap + bq + cr$$

Entonces :

$$a^3 + b^3 + c^3 = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a & b & c \\ c^2 & b^2 & a^2 \end{bmatrix} = a^2b + b^2c + c^2a$$

c-ii) Sean $a_i > 0, i = 1, \cdots, n$ y $s = a_1 + \cdots + a_n$. Probar que

$$\frac{a_1}{s - a_1} + \cdots + \frac{a_n}{s - a_n} \geq \frac{n}{n-1}.$$

Es evidente que las sucesiones

$$a_1, \cdots, a_n \quad \text{ y } \frac{1}{s - a_1}, \cdots, \frac{1}{s - a_n}$$

están ordenadas en el mismo sentido. Por lo tanto

$$\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ \frac{1}{s-a_1} & \cdots & \frac{1}{s-a_n} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \frac{1}{s-a_k} & \frac{1}{s-a_{k+1}} & \cdots & \frac{1}{s-a_{k-1}} \end{bmatrix} \quad (k = 2, 3, \cdots n)$$

Sumando estas n-1 desigualdades se obtiene el resultado.

c-iii) Probar la desigualdad

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab.$$

Aquí extendemos el "producto escalar" a tres sucesiones:

$$\begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$$

aquí, en la primera matriz, las tres sucesiones están ordenadas en el mismo sentido, pero en la segunda no.

5.3.**Desigualdad de Bernouilli**
Si $h > -1$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $(1 + h)^n \geq 1 + nh$

5.4.**Desigualdad de Chebyshev**

Si $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ y $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$, entonces

$$\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1 + \cdots + b_n}{n}\right) \leq \frac{a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n}{n}$$

Si las dos sucesiones están ordenadas inversamente, el signo de la desigualdad se invierte. Se puede demostrar con la desigualdad de reordenación.

5.5.**Desigualdad de Abel**

Si $\{a_1, \cdots, a_n\}$ y $\{b_1, \cdots, b_n\}$ son dos conjuntos de números reales, con $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$, y se consideran las sumas $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2, \cdots, s_n = a_1 + \cdots + a_n$, entonces llamando

$$m = \min(s_1, \cdots, s_n), \quad M = \max(s_1, \cdots, s_n)$$

se verifica

$$mb_1 \leq a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \leq M b_1.$$

5.6. **Desigualdad de Cauchy-Schwarz**

Para tres variables : partiendo de la identidad de Lagrange,

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right) = (ax+by+cz)^2+(ay-bx)^2+(bz-ay)^2+(cx-az)^2$$

es evidente que

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right) \geq (ax+by+cz)^2,$$

y el signo igual vale si y sólo si $a/x = b/y = c/z$.

En general: dados los conjuntos de números reales $\{a_1, \cdots, a_n\}$ y $\{b_1, \cdots, b_n\}$, entonces

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2,$$

y el signo igual vale si y sólo si $a_i/b_i = r$ para todo i.

5.7.**Desigualdad de Jensen**

Una función definida en el intervalo $[\alpha, \beta]$ es convexa en ese intervalo si, para cualesquiera $a, b \in [\alpha, \beta]$ se cumple

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$

(Geométricamente esto significa que la curva queda por debajo de la cuerda). Esta condición la cumplen, por ejemplo, las funciones tales que $f''(x) > 0$ en $[\alpha, \beta]$.

Entonces se verifica la desigualdad de Jensen: Para toda f convexa en $[\alpha, \beta]$,

$$f\left(\frac{1}{n}\sum a_i\right) \leq \frac{1}{n}\sum f(a_i), \text{ con } a_i \in [\alpha, \beta].$$

5.8.**Desigualdad de Jordan**
Es conocido que $\sin x \leq x \leq \tan x$ si $0 \leq x < \pi/2$.
Entonces la desigualdad de Jordan dice que si $|x| \leq \pi/2, x \neq 0$

$$\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin x}{x} < 1$$

5.9.**Algunas recomendaciones para demostrar desigualdades**

a)Intente transformar la desigualdad para llevarla a la forma $\sum p_i$, con $p_i > 0$, por ejemplo mediante $p_i = x_i^2$.

b)¿Recuerda algo la expresión de alguna de las medias?

c)¿Se puede aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz? Se puede aplicar más veces de lo que parece.

d)¿Se puede aplicar la desigualdad de reordenación? También está subestimado este resultado.

e)¿Es simétrica? En tal caso, supóngase $a \leq b \leq \cdots$

Puede resultar útil expresar la desigualdad mediante las funciones simétricas elementales

f)Si se trata de una desigualdad sobre los lados de un triángulo, inténtese usar la desigualdad triangular. Se puede poner $a = x + y$, $b = y + z, c = z + x$, donde ahora x, y, z son números reales positivos.

g)Lleve la desigualdad a la forma $f(a, b, \cdots) \geq 0$. Si f es una función cuadrática en una de las variables, puede ser útil considerar su discriminante.

h) Si la desigualdad debe probarse para los enteros postivos $n \geq n_0$, inténtese usar la inducción.

i) Intente hacer estimaciones formando sumas o productos telescópicos:
$a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + \cdots + a_n - a_{n-1} = a_n - a_1$

$$\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \cdots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_n}{a_1}$$

j)Si una suma de cantidades positivas es constante, su producto es máximo cuando todas son iguales.

Si un producto de cantidades positivas es constante, su suma es mínima cuando todas son iguales

Problemas
Problema 1

Demostrar que el producto de k enteros positivos, cuya suma vale N, siendo $N = kp+h$, es máximo cuando h de los factores son iguales a $p+1$ y los restantes $k - h$ son iguales a p.

(Victor Thébault)

Solución

Por el algoritmo de la división, $0 \leq h < k$. Si la diferencia entre el mayor y el menor elementos de un conjunto de k enteros vale 1, entonces el conjunto está formado, evidentemente, por h elementos iguales a $p+1$ y $k-h$ elementos iguales a p.

Si esta diferencia es mayor que 1, entonces se puede construir un nuevo conjunto con el mismo número de enteros, la misma suma , pero con un producto mayor : se reemplaza uno de los elementos maximales, M, por $M-1$, y uno de los elementos minimales, m, por $m+1$. Como $M-m>1$, se tiene $(M-1)(m+1) = Mm + M - m - 1 > Mm$, y así el producto aumenta. De esta manera, sucesivamente, se termina por llegar a la conclusión, ya que el conjunto es finito.

Problema 2

Una desigualdad de Kömal

Sean a, b, c, d números reales positivos, tales que

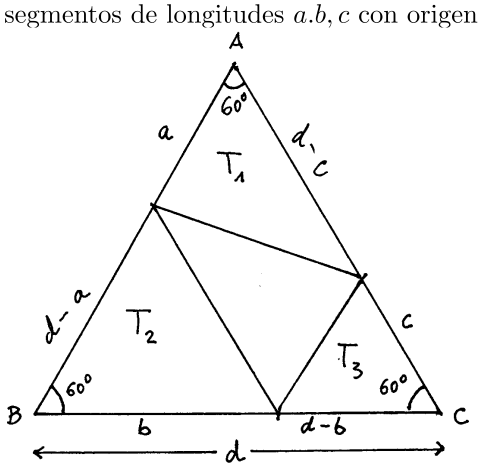
$$d = \max\{a, b, c, d\}.$$

Demostrar que

$$a(d-c) + b(d-a) + c(d-b) \leq d^2.$$

Solución 1

Se construye un triángulo equilátero de lado d, y en sus lados se señalan segmentos de longitudes $a.b, c$ con origen en cada vértice:



Es evidente que la suma de las áreas de los triángulos T_1, T_2, T_3 es menor o igual que el área de ABC:

$$T_1 + T_2 + T_3 \leq [ABC] = \frac{1}{2} d^2 \frac{\sqrt{3}}{2};$$

como $T_1 = \frac{1}{2} a(d-c) \frac{\sqrt{3}}{2}, T_2 = \frac{1}{2} b(d-a) \frac{\sqrt{3}}{2}, T_3 = \frac{1}{2} c(d-b) \frac{\sqrt{3}}{2}$

resulta inmediatamente

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\left[a\left(d-c\right)+b\left(d-a\right)+c\left(d-b\right)\right]\leq d^{2}\frac{\sqrt{3}}{4},$$

que es precisamente la desigualdad propuesta.

Solución 2

La desigualdad propuesta se puede escribir en la forma

$$d^{2}-d\left(a+b+c\right)+ab+bc+ca\geq 0,$$

y una súbita inspiración nos conduce al polinomio de tercer grado con raíces a,b,c :

$$\begin{aligned} p(x) &= \left(x-a\right)\left(x-b\right)\left(x-c\right) \\ &= x^{3}-\left(a+b+c\right)x^{2}+\left(ab+bc+ca\right)x-abc, \end{aligned}$$

que escribimos en la forma

$$p(x)+abc=x^{3}-\left(a+b+c\right)x^{2}+\left(ab+bc+ca\right)x,$$

y de aquí pasamos a la función racional

$$f(x)=\frac{p(x)+abc}{x}=x^{2}-\left(a+b+c\right)x+ab+bc+ca,$$

que, evidentemente, toma en $d=\max\left\{a,b,c,d\right\}$ un valor positivo :

$$\begin{aligned} f(d) &= \frac{\left(d-a\right)\left(d-b\right)\left(d-c\right)+abc}{d}= \\ &= d^{2}-d\left(a+b+c\right)+ab+bc+ca, \quad \text{c.q.d.} \end{aligned}$$

Problema 3

Una desigualdad clásica

Si $a,b>0$ tales que $a+b=1$, demostrar que

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^{2}+\left(b+\frac{1}{b}\right)^{2}\geq\frac{25}{2}.$$

Propuesto en Stromberg, "An introduction to Classical Real Analysis", pg.35; resuelto en Mitrinovic, "Elementary Inequalities", pg.69.

Solución

Haremos uso reiterado de la desigualdad de las medias aritmética y geométrica; primero en la forma

$$a+b\geq 2\sqrt{ab},$$

que en nuestro caso se escribe como

$$1\geq 2\sqrt{ab}\Longrightarrow\frac{1}{ab}\geq 4 \qquad (1).$$

Y a continuación en la forma $x^2 + y^2 \geq 2xy$, que en nuestro caso es

$$\begin{aligned} L &= \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq 2\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right) \\ -L &\leq -2\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right). \end{aligned}$$

Pero puesto que $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$, podremos poner

$$\begin{aligned} L &= \left(a + b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 - 2\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{ab}\right)^2 - 2\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right) \geq (1+4)^2 - L, \end{aligned}$$

es decir

$$2L \geq 25, \quad \text{c.q.d.}$$

Observación: Hay otra posible demostración, utilizando la función convexa $F(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2$ para $x > 0$ y la desigualdad de Jensen.

Problema 4

Un problema de la Olimpiada de Rusia 1994

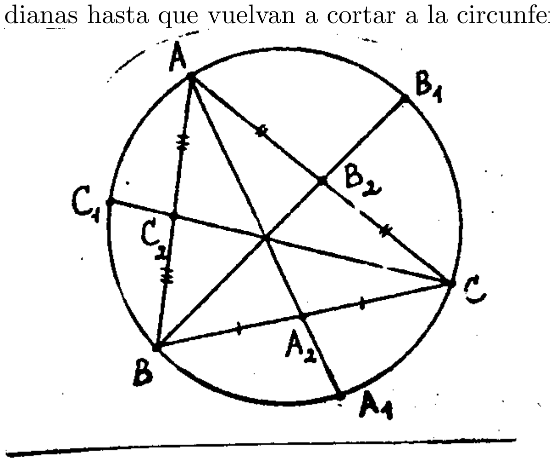
Sean a, b, c los lados de un triángulo; m_a, m_b, m_c las longitudes de sus medianas, y D el diámetro del círculo circunscrito. Demostrar que

$$\frac{a^2 + b^2}{m_c} + \frac{b^2 + c^2}{m_a} + \frac{c^2 + a^2}{m_b} \leq 6D.$$

(Dimitri Tereshin)

Solución

El hecho de que en la desigualdad propuesta aparezca el diámetro del círculo circunscrito, que es la mayor cuerda de dicho círculo, sugiere prolongar las medianas hasta que vuelvan a cortar a la circunferencia circunscrita :



Llamamos a los nuevos puntos de intersección con la circunferencia circunscrita A_1, B_1, C_1. Es obvio que

$$AA_1 \leq D,\ BB_1 \leq D,\ CC_1 \leq D,$$

o lo que es lo mismo,

$$m_a + A_1A_2 \leq D,\ m_b + B_1B_2 \leq D,\ m_c + C_1C_2 \leq D \qquad (1).$$

Para calcular A_1A_2 calcularemos de dos maneras la potencia del punto A_2 respecto de la circunferencia circunscrita :

$$A_1A_2 \cdot AA_2 = BA_2 \cdot A_2C \Longleftrightarrow m_a \cdot A_1A_2 = \frac{a^2}{4}$$

y análogamente se obtienen $B_1B_2 = \frac{b^2}{4m_b}$ y $C_1C_2 = \frac{c^2}{4m_c}$.
Sustituyendo en (1) y sumándolas resulta

$$\frac{4m_a^2 + a^2}{4m_a} + \frac{4m_b^2 + b^2}{4m_b} + \frac{4m_c^2 + c^2}{4m_c} \leq 3D$$

pero utilizando el teorema de la mediana, los numeradores son, respectivamente

$$2b^2 + 2c^2,\ 2c^2 + 2a^2,\ 2a^2 + 2b^2$$

con lo que se obtiene

$$\frac{a^2 + b^2}{2m_c} + \frac{b^2 + c^2}{2m_a} + \frac{c^2 + a^2}{2m_b} \leq 3D,$$

que es claramente equivalente a la propuesta.

Problema 5

Demostrar que de cualquier cuaterna de números distintos, del intervalo $(0, 1)$, es posible elegir dos, a, b tales que

$$\sqrt{(1 - a^2)(1 - b^2)} > \frac{a}{2b} + \frac{b}{2a} - ab - \frac{1}{8ab}$$

(Olimpiada de la República Checa, 1994)

Solución

Todo número del intervalo $(0, 1)$ es de la forma $\cos\alpha$, con $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Por lo tanto, si dividimos el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ en 3 partes iguales, de cualquier cuaterna de tales números existirán dos (por el principio del palomar), a, b tales que

$$a = \cos\alpha,\ b = \cos\beta,\ \text{con } 0 < |\alpha - \beta| < \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

La desigualdad $\cos(\alpha - \beta) > \frac{\sqrt{3}}{2}$ puede escribirse como

$$ab + \sqrt{(1 - a^2)(1 - b^2)} > \frac{\sqrt{3}}{2},$$

y elevando al cuadrado

$$2ab\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} > a^2+b^2-2a^2b^2-\frac{1}{4},$$

y dividiendo por $2ab>0$ se obtiene el resultado.

Problema 6

Sean $a_1, a_2, \cdots, a_n$ números reales positivos tales que $a_1+\cdots+a_n=1$. Demostrar que

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\geq\frac{1}{2}.$$

(24 Olimpiada de la URSS)

Solución

Partimos de la igualdad evidente

$$0=(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_{n-1}-a_n)+(a_n-a_1)$$

que escribimos en la forma

$$\frac{a_1^2-a_2^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2-a_3^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2-a_n^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2-a_1^2}{a_n+a_1}=0,$$

es decir

$$\begin{aligned} & \frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2}{a_n+a_1} \\ = & \frac{a_2^2}{a_1+a_2}+\frac{a_3^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_1^2}{a_n+a_1} \end{aligned}$$

y esto es lo mismo que escribir

$$\begin{aligned} & \frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2}{a_n+a_1} \\ = & \frac{1}{2}\left(\frac{a_1^2+a_2^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2+a_3^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2+a_n^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2+a_1^2}{a_n+a_1}\right) \end{aligned}$$

Ahora aplicaremos la desigualdad de las medias aritmética y geométrica en la forma

$$\frac{a_i^2+a_j^2}{a_i+a_j}\geq\frac{1}{2}(a_i+a_j)$$

(Compruébese), con lo que obtenemos

$$\begin{aligned}
& \frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2}{a_n+a_1} \\
= & \ \frac{1}{2}\left(\frac{a_1^2+a_2^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2+a_3^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2+a_n^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2+a_1^2}{a_n+a_1}\right) \geq \\
\geq & \ \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(a_1+a_2)+\frac{1}{2}(a_2+a_3)+\cdots+\frac{1}{2}(a_{n-1}+a_n)+\frac{1}{2}(a_n+a_1)\right]= \\
= & \ \frac{1}{2}(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n)=\frac{1}{2},\ \text{y hemos terminado.}
\end{aligned}$$

Problema 7

Sean a, b, c las longitudes de los lados de un triángulo. Probar que

$$\left|\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}\right|<\frac{1}{16}.$$

(Olimpiada Iberoamericana 1989, propuesto por Cuba y modificado por el Jurado)

Comentarios

a)La desigualdad originalmente propuesta tenía como cota 1, que se obtiene fácilmente transformando en producto la expresión que aparece entre las barras del valor absoluto. Con objeto de obtener una cota mejor, el Prof. Angelo Barone Netto, de Brasil, aplicó el procedimiento que se expone en la solución, con lo que el problema aumentó considerablemente su nivel de dificultad.

b) En la revista canadiense *Crux Mathematicorum, 1987, p.67, nr.1080,* propuesto por el gran especialista en desigualdades geométricas V.S. Mitrinovic, se pide hallar el máximo valor de la función

$$f(a, b, c)=\left|\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}\right|,$$

cuando a, b, c son las longitudes de los lados de un triángulo. La solución allí publicada, del Prof. Rennie, de Australia, demuestra que dicho máximo es

$$\frac{\sqrt{10}-3}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} \simeq 0,044456...,$$

obtenido mediante técnicas de cálculo diferencial de varias variables. La cota del problema da $\frac{1}{16}=0,0625$.

Solución

Cada fracción es, obviamente, menor que 1 en valor absoluto, pero esto daría la cota 3, muy alejada de lo que pide el problema. Intentemos transformar esa suma en un producto :

$$
\begin{aligned}
& \frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a} \\
= \quad & \frac{(a-b)(b+c)(c+a)+(b-c)(a+b)(c+a)+(c-a)(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \\
= \quad & \frac{[(a-b)(b+c)+(b-c)(a+b)](c+a)+(c-a)(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \\
= \quad & \frac{2b(a-c)(c+a)+(c-a)(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \\
= \quad & \frac{(a-c)[2b(a+c)-(a+b)(b+c)]}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{(a-c)[a(b-c)+b(c-b)]}{(a+b)(b+c)(c+a)} \\
= \quad & \frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}
\end{aligned}
$$

y la desigualdad propuesta se transforma en

$$S=\left|\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right|<\frac{1}{16}$$

Con el primer miembro así escrito, la cota 1 se obtiene fácilmente, pero esta cota sigue estando alejada de la propuesta. En realidad, hasta ahora solamente hemos realizado manipulaciones algebraicas del primer miembro de la desigualdad, sin utilizar nada más. Como la desigualdad es simétrica en las tres variables, no hay inconveniente en suponer $a<b<c$; además tomaremos la longitud del lado a del triángulo como unidad, con lo que

$$a=1, \quad b=1+x, \quad c=1+x+y.$$

Por tratarse de las longitudes de los lados del triángulo, se verifica la desigualdad triangular $c<a+b$. Veamos como se escriben ahora los términos de S :

$$
\begin{aligned}
b-a &= x, \quad c-b=y, \quad c-a=x+y \\
a+b &= 2+x, \quad b+c=2+2x+y, \quad c+a=2+x+y
\end{aligned}
$$

y la desigualdad triangular $c<a+b$ se traduce en

$$1+x+y<2+x \Longleftrightarrow y<1.$$

Entonces la expresión S queda en la forma

$$S=\frac{xy(x+y)}{(2+x)(2+2x+y)(2+x+y)}.$$

Como $y<1$, S es menor que la fracción obtenida sustituyendo en el numerador y por 1; y por otra parte, si los dos últimos factores del denominador se sustituyen, respectivamente, por $2+2x$ y $2+x$, ese denominador disminuirá, y el cociente aumentará. Es decir

$$S < \frac{x \cdot 1 \cdot (x+1)}{(2+x)^2 (1+x) \cdot 2} = \frac{x(x+1)}{2(2+x)^2}$$

Si conseguimos probar que $\frac{x(x+1)}{2(2+x)^2} \leq \frac{1}{16}$, habremos terminado.

En efecto,

$$\frac{x(x+1)}{2(2+x)^2} \leq \frac{1}{16} \Longleftrightarrow 8x \leq (2+x)^2 \Longleftrightarrow 0 \leq (2-x)^2,$$

que es evidentemente cierta.

Problema 8

Sean x, y, z números reales tales que $0 < x < y < z < \frac{\pi}{2}$.

Demostrar que

$$\frac{\pi}{2} + 2\sin x \cos y + 2\sin y \cos z > \sin 2x + \sin 2y + \sin 2z$$

(Olimpiada Iberoamericana 1989 ; propuesto por Cuba)

Solución

(del Prof. Angel Pérez Cuza, de Cuba)

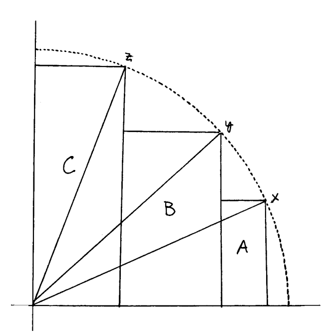
Descomponer los productos en sumas sólo conduce a complicar más el problema. La desigualdad es equivalente a

$$\frac{\pi}{2} > 2\sin x \cos x + 2\sin y \cos y + 2\sin z \cos z - 2\sin x \cos y - 2\sin y \cos z$$

o bien, dividiendo por 2,

$$\frac{\pi}{4} > \sin x(\cos x - \cos y) + \sin y(\cos y - \cos z) + \sin z \cos z.$$

Utilizando la representación geométrica de las razones trigonométricas en el primer cuadrante, se observa



que los tres sumandos del segundo miembro de la desigualdad propuesta representan las áreas de los rectángulos A, B y C de la figura, cuya suma es, obviamente, menor que el área del cuadrante, que es precisamente $\pi/4$, con lo que hemos terminado.

Comentario

Este problema es un caso particular, con $n = 3$, de un problema propuesto por Grecia, pero no usado, en la IMO 1975 :

Si $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \pi/2$, entonces

$$\begin{aligned} & \sin 2x_1 + \cdots + \sin 2x_n - \sin(x_1 - x_2) - \cdots - \sin(x_{n-1} - x_n) \\ < \; & \frac{\pi}{2} + \sin(x_1 + x_2) + \cdots + \sin(x_{n-1} + x_n), \end{aligned}$$

que se demuestra de la misma forma.

Problema 9

Con las notaciones habituales para los triángulos (r, radio del círculo inscrito; $[ABC]$,área del triángulo), demostrar que

$$\frac{1}{a}\cos^2\frac{A}{2} + \frac{1}{b}\cos^2\frac{B}{2} + \frac{1}{c}\cos^2\frac{C}{2} \geq \frac{27r}{8[ABC]}$$

(Olimpiada de la República Democrática Alemana, 1987)

Solución

Mediante la fórmula

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos x)$$

y el teorema del coseno, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{a}\cos^2\frac{A}{2} &= \frac{1}{2a}\left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) = \frac{b^2 + c^2 - a^2 + 2bc}{4abc} \\ \frac{1}{b}\cos^2\frac{B}{2} &= \frac{c^2 + a^2 - b^2 + 2ac}{4abc} \\ \frac{1}{c}\cos^2\frac{C}{2} &= \frac{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab}{4abc} \end{aligned}$$

así que sumando, el primer miembro de la desigualdad propuesta se escribe como

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca}{4abc} = \frac{(a + b + c)^2}{4abc} = \frac{p^2}{abc},$$

siendo p el semiperímetro del triángulo.

Como $[ABC] = pr$, el primer miembro de la desigualdad propuesta se escribe como

$$\frac{p^3 r}{abc\,[ABC]} \qquad (1)$$

La desigualdad de las medias aritmética y geométrica aplicada a los tres lados del triángulo da

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \Longleftrightarrow p^3 \geq \frac{27}{8} abc \qquad (2)$$

valiendo el signo = cuando el triángulo es equilátero.

Por lo tanto, (1) y (2) dan

$$\frac{1}{a}\cos^2\frac{A}{2} + \frac{1}{b}\cos^2\frac{B}{2} + \frac{1}{c}\cos^2\frac{C}{2} \geq \frac{27r}{8\,[ABC]},$$

valiendo el signo igual cuando el triángulo es equilátero y sólo en ese caso.

Problema 10

Si x, y, z son números reales no negativos tales que $x+y+z=1$, probar que

$$0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}.$$

(IMO 1984; propuesto por Alemania Federal)

Solución

De

$$xy + yz + zx - 2xyz = xy\,(1-z) + yz(1-x) + zx$$

es evidente que se verifica la desigualdad de la izquierda.

El hecho de que en el primer miembro de la desigualdad de la derecha aparezcan xy+yz+zx y xyz conduce a pensar que puede ser útil considerar un polinomio cuyas raíces sean los números x, y, z :

$$P(t) = (t-x)(t-y)(t-z) = t^3 + pt^2 + qt + r;$$

las fórmulas de Cardano-Vieta dan en este caso

$$\begin{aligned} p &= -(x+y+z) = -1, \\ q &= xy + yz + zx \\ r &= -xyz \end{aligned}$$

Hay que probar que

$$q + 2r \leq \frac{7}{27}.$$

Calculando $P(1/2)$ obtenemos

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} + \frac{q+2r}{2};$$

por lo tanto, la desigualdad que tenemos que probar es

$$P\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{216} \qquad (*).$$

Cuando $x \leq \frac{1}{2}, y \leq \frac{1}{2}, z \leq \frac{1}{2}$,entonces

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{1}{2}-x\right)\left(\frac{1}{2}-y\right)\left(\frac{1}{2}-z\right) \leq \\ &\leq \left(\frac{\frac{1}{2}-x+\frac{1}{2}-y+\frac{1}{2}-z}{3}\right)^3 = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}. \end{aligned}$$

Si alguno de los números x, y, z es mayor que 1/2, el primer miembro de (*) es negativo y se cumple trivialmente la desigualdad (*). Dos de los números no pueden ser mayores que 1/2 porque la suma de los tres es 1.