El método de inducción

F. Bellot Rosado

El método de inducción

Cuando se desea probar que una cierta proposición es cierta para *todos* los números naturales, es particularmente útil el procedimiento de demostración conocido como *método de inducción*, del que vamos a ver en qué consiste y cómo se utiliza. La situación se asemeja a la siguiente:

supongamos que tenemos una escalera con *infinitos peldaños ;* ¿cómo podríamos describir un procedimiento que nos permitiera asegurar que subimos todos los peldaños de la escalera?

Una manera de resolver esto sería la siguiente :

1) Subimos el primer peldaño de la escalera.

2) Suponiendo que hayamos subido hasta un peldaño *cualquiera*, subimos al siguiente.

F. Bellot Rosado

Principio de inducción

Para ser algo más precisos, formularemos el principio de inducción en los siguientes términos :

Queremos demostrar que una proposición P es cierta para todos los números naturales. (Como puede verse, resultará imprescindible *conocer* con precisión la formulación de la proposición P).

Entonces procederemos en dos etapas :

1) ***(Inicio:)*** Verificamos que P es cierta para el primer número natural (*generalmente será el 0 ó el 1, dependiendo de cómo se formule* P).

2) ***(Fase inductiva:)*** : Suponiendo que P es cierta para un número natural cualquiera, demostramos que también lo es para el siguiente.

Necesitamos fijar una cierta notación para representar ese número natural cualquiera del que hablamos, así como el siguiente. Generalmente se emplea UNA de las letras i, j, k, n para representar ese número natural arbitrario, y según la que elijamos, el siguiente número natural vendrá representado por $i+1, j+1, k+1, n+1$, respectivamente.

F. Bellot Rosado

Para ilustrar el método de inducción desarrollaremos varios ejemplos, los primeros están referidos al cálculo de sumas de potencias de números enteros, para ello comenzamos con las Sumas de enteros para intentar despues la generalización a sumas de potencias de números enteros.

Otros ejemplos posteriores que completan el tema son:

- Torres de Hanoi
- Números de Fibonacci
- Una desigualdad

F. Bellot Rosado

Sumas de enteros

Veamos un primer ejemplo. Consideremos la suma

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n,$$

donde n es un número natural. Debe observarse que, en realidad, estamos considerando una familia de sumas :

$$\begin{aligned}
&1\\
&1+2\\
&1+2+3\\
&1+2+3+4\\
&etc
\end{aligned}$$

donde el número de sumandos es variable.

¿Existirá una fórmula "cerrada", es decir, con un número finito de operaciones, que nos permita obtener el valor de S_1 para cada valor de n?

La respuesta es afirmativa :

$$\begin{aligned} S_1 &= 1+2+3+\cdots+n \\ S_1 &= n+(n-1)+\cdots+1 \end{aligned}$$

y sumando ”por columnas” se obtiene

$$2S_1 = (n+1)n,$$

con lo cual hemos demostrado que

$$S_1 = 1+2+3+\cdots+(n-1)+n = \frac{n\,(n+1)}{2}, \qquad (1)$$

cualquiera que sea el número natural n.

El primer ejemplo de una proposición P que demostraremos por inducción va a ser, precisamente, la igualdad que da S_1 :

$$P: 1+2+3+\cdots+n = \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

1) P es cierta para el primer número natural, $n = 1$: en este caso, la suma del primer miembro sólo tiene el primer sumando, 1 ; y la ex-

presión del segundo miembro da, para $n = 1$,

$$\frac{1 \cdot 2}{2} = 1.$$

2) Etapa inductiva : Supongamos que la proposición P es cierta para un número natural cualquiera, n :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Tenemos que probar que también lo es para el siguiente, $n + 1$:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Para ello, sustituyamos la suma de los n primeros sumandos por el valor que estamos suponiendo cierto : tendremos que probar que

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

lo cual es inmediato en cuanto saquemos en el primer miembro factor común $n + 1$ y hagamos operaciones. Esto termina la etapa inductiva y por lo tanto hemos probado la fórmula (1) por inducción.

Planteemos ahora el problema de calcular la suma de los cuadrados de los n primeros números naturales

$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2,$$

la suma de los cubos

$$S_3(n) = 1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3,$$

o, en general, la suma de las potencias de exponente k :

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + \cdots + (n-1)^k + n^k.$$

El primer problema que tenemos es *conjeturar* cuanto valdrán ; después llegará el momento de *probar* que nuestra conjetura es cierta.

A la búsqueda de una pista, formemos una tabla con los primeros valores de S_1, S_2 y S_3 :

n	1	2	3	4	5	6
S_1	1	3	6	10	15	21
S_2	1	5	14	30	55	91
S_3	1	9	36	100	225	441

F. Bellot Rosado

La relación entre S_1 y S_3 parece clara : la conjetura natural es

$$1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \qquad (2)$$

y en este caso nos podemos ahorrar la fase primera de la inducción; la tabla demuestra que la proposición (2) es cierta para los seis primeros números naturales.

Con objeto de probar la fase inductiva, suponemos que (2) es verdad para el número natural arbitrario n ; debemos probar que

$$1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2\,(n+2)^2}{4},$$

y sustituyendo los primeros n sumandos del primer miembro por el segundo miembro de (2), debemos demostrar que

$$\begin{aligned} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 &= \frac{(n+1)^2\,(n+2)^2}{4} \Longleftrightarrow \\ (n+1)^2\left[\frac{n^2}{4} + n + 1\right] &= \frac{(n+1)^2\left(n^2+4n+4\right)}{4} = \frac{(n+1)^2\,(n+2)^2}{4}, \end{aligned}$$

con lo que hemos terminado la fase inductiva y, por tanto, demostrado por inducción la validez de la fórmula (2).

La situación para S_2 es más difícil. No parece sencillo conjeturar la forma general cerrada del segundo miembro de la suma $S_2(n)$ a partir de los valores iniciales del cuadro (ni tampoco si tuviéramos algunos más).

¿Cómo estarán relacionadas S_1 y S_2? Añadamos a la tabla una nueva fila, que dé los valores de S_2/S_1.

$$\begin{array}{ccccccc} n & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ S_2/S_1 & \frac{3}{3} & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} & \frac{9}{3} & \frac{11}{3} & \frac{13}{3} \end{array}$$

¡Ahora sí podemos conjeturar! Parece que

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{2n+1}{3},$$

lo cual nos lleva a la hipótesis de que

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

que confirmaremos por el método de inducción, ahora sin dificultades dignas de mención...

Pascal, naturalmente, tenía un método propio para llegar a este resultado :

Pongamos
$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1,$$
o, en forma equivalente
$$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1,$$
que sabemos es válida para cualquier número natural n.

Escribamos las n igualdades que resultan de ésta, desde $n = 1$ hasta n :

$$\begin{aligned}
2^3 - 1^3 &= 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 \\
3^3 - 2^3 &= 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 \\
&\dots \\
n^3 - (n-1)^3 &= 3 \cdot (n-1)^2 + 3 \cdot (n-1) + 1 \\
(n+1)^3 - n^3 &= 3n^2 + 3n + 1
\end{aligned}$$

Cuando sumemos miembro a miembro, la suma de los primeros miembros es una suma *telescópica*, cuyo valor se reduce a
$$(n+1)^3 - 1^3;$$

sumando las tres columnas de los segundos miembros se obtiene, evidentemente

$$3S_2 + 3S_1 + n,$$

con lo cual obtenemos

$$S_2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6},$$

como antes.

Este método de Pascal es el que emplearemos para encontrar un modo de calcular S_k ; para eso escribimos

$$(n+1)^{k+1} - n^{k+1} = \binom{k+1}{1} n^k + \binom{k+1}{2} n^{k-1} + \cdots + 1$$

y escribimos esta igualdad desde $n = 1$ hasta n :

$$\begin{aligned}
2^{k+1} - 1^{k+1} &= (k+1)\,1^k + \binom{k+1}{2} 1^{k-1} + \cdots + 1 \\
3^{k+1} - 2^{k+1} &= (k+1)\,2^k + \binom{k+1}{2} 2^{k-1} + \cdots + 1 \\
4^{k+1} - 3^{k+1} &= (k+1)\,3^k + \binom{k+1}{2} 3^{k-1} + \cdots + 1 \\
&\cdots \\
(n+1)^{k+1} - n^{k+1} &= (k+1)\,n^k + \binom{k+1}{2} n^{k-1} + \cdots + 1
\end{aligned}$$

así que, sumando miembro a miembro, obtendremos la *fórmula recurrente*

$$(n+1)^{k+1} - 1 = (k+1)\,S_k + \binom{k+1}{2} S_{k-1} + \cdots + n,$$

de la que es posible despejar S_k suponiendo conocidas $S_{k-1}, \cdots, S_2, S_1$.

Esta es una fórmula recurrente. Veamos otros ejemplos donde es posible combinar la recurrencia y la inducción.

Torres de Hanoi

Números de Fibonacci

Una desigualdad